Derivadas

Introducción

Los orígenes del Cálculo estuvieron motivados por el deseo de resolver diversos problemas vinculados al movimiento de los cuerpos, así como problemas de tipo geométrico de importancia en Óptica y problemas de cálculo de valores máximos y mínimos de una función dada. Simplificando podemos destacar dos problemas principales:

Determinar la tangente a una curva en un punto (el problema de las tangentes).

Determinar el área encerrada por una curva (el problema de las cuadraturas).

Son los conceptos de derivada e integral, respectivamente, los que permiten resolver satisfactoriamente dichos problemas. Mientras que el concepto de integral tiene sus raíces en la antigüedad clásica, la otra idea fundamental del Cálculo, la derivada, no se formuló hasta el siglo XVII. Fue el descubrimiento efectuado por Sir Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716) de la relación entre estas dos ideas, tan dispares en apariencia, lo que inició el magnífico desarrollo del Cálculo. Si bien los trabajos de Newton y Leibnitz son decisivos por sus aportaciones e influencia, no hay que olvidar que ellos son el punto culminante de un largo proceso en el que han participado científicos de la talla de Johannes Kepler (1571-1630), René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665), John Wallis (1616-1703) e Isaac Barrow (1630-1677) entre otros.

Concepto de derivada. Interpretación física y geométrica

Para entender los resultados del Cálculo diferencial es necesario, antes que nada, comprender la idea básica del mismo: el concepto de derivada. La derivada de una función puede interpretarse geométricamente como la pendiente de una curva, y físicamente como una razón "instantánea" de cambio.

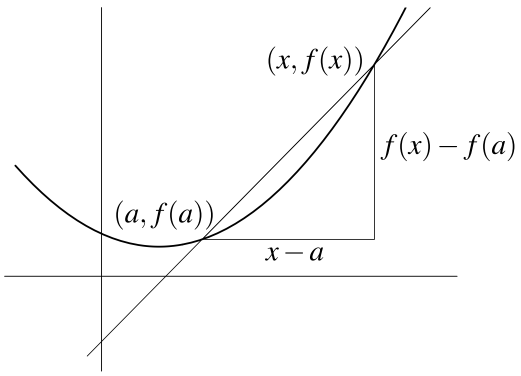
Tangente a una curva

A principios del siglo XVII no se sabía cómo calcular la tangente a una curva en un punto de la misma. Este problema se presentaba con frecuencia en mecánica, en óptica y en geometría.

Vamos a estudiar el concepto general de tangente a una curva en un punto dado. En general, no es un asunto sencillo hallar la pendiente de esta tangente. La razón es que, en principio, se necesita para ello otro punto, además del de tangencia. Supongamos que queremos hallar la tangente a la curva de ecuación cartesiana $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$. La estrategia, usada primero por Pierre de Fermat y más tarde por Newton, consiste en aproximar la tangente por rectas secantes cuyas pendientes sí pueden calcularse directamente. En particular, considérese la recta que une el punto $(a, f(a))$ con un punto cercano, $(x, f(x))$, de la gráfica de f. Esta recta se llama una secante (recta que corta, pero no es tangente a la curva). La pendiente de esta secante es:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

dicho número suele llamarse *cociente incremental de* f *en* a.



Nótese que una secante es una buena aproximación de la tangente, siempre que el punto $(x, f(x))$ esté muy próximo a $(a, f(a))$. Estas consideraciones llevan a *definir la tangente a la gráfica de* f *en el punto* $(a, f(a))$ *como la recta que pasa por dicho punto y cuya pendiente es igual al límite*:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

supuesto, claro está, que dicho límite exista.

Razón de cambio

Muchas leyes de la Física, la Química, la Biología o la Economía, son funciones que relacionan una variable “dependiente” y con otra variable “independiente” x, lo que suele escribirse en la forma $y = f(x)$. Si la variable independiente cambia de un valor inicial a a otro x, la variable y lo hace de $f(a)$ a $f(x)$. La *razón de cambio promedio de* $y = f(x)$ *con respecto a* x *en el intervalo* $[a, x]$ es:

$$\text{Razón de cambio promedio } = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Con frecuencia interesa considerar la razón de cambio en intervalos cada vez más pequeños. Esto lleva a definir lo que podemos llamar “*razón de cambio puntual de* $y = f(x)$ *con* *respecto a x en el punto a*" como:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

El ejemplo más conocido de esto que decimos es el de una partícula que se mueve a lo largo de una recta sobre la cual hemos elegido un origen. Sea $f(t)$ la distancia de la partícula al origen en el tiempo t. La razón de cambio promedio tiene en este caso una interpretación física natural. Es la *velocidad media* de la partícula durante el intervalo de tiempo considerado. Parece intuitivo que, en cada instante, la partícula se mueve con una determinada *velocidad instantánea*. Pero la definición corriente de velocidad es en realidad una definición de velocidad media; la única definición razonable de velocidad instantánea es como la razón de cambio puntual. Es importante darse cuenta de que la velocidad instantánea es un concepto teórico, y una abstracción, que no corresponde exactamente a ninguna cantidad observable.

Notación En lo que sigue las letras I, J representan un intervalo no vacío de números reales.

Definición de derivada Se dice que **una función** $f : I \to \mathbb{R}$ **es derivable en un punto** $a \in I$, si existe el límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Explícitamente, f es derivable en a si hay un número $L \in \mathbb{R}$ verificando que para cada número $\varepsilon > 0$ existe algún número $\delta > 0$ tal que para todo $x \in I$ con $x \neq a$ y $|x - a| < \delta$ se tiene que:

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - L \right| \leqslant \varepsilon.$$

Dicho número L se llama **la derivada de** f **en** a y suele representarse por $f'(a)$ (notación debida a Lagrange) y también, a veces, por $\left.\frac{d f(x)}{dx}\right|_{x=a}$ (notación de Leibnitz).

Observaciones

i) El límite $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ se escribe también en la forma $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

ii) La derivabilidad de f en un punto $a \in I$ es una *propiedad local*, depende solamente del comportamiento de f en los puntos de I próximos al punto a. Concretamente, si J es cualquier *intervalo abierto* que contiene el punto a, se verifica que f es derivable en a si, y sólo si, la función restricción $f_{|I\cap J}$ es derivable en a y, por supuesto, en tal caso ambas funciones tienen la misma derivada en a.

Derivadas laterales

Se dice que f **es derivable por la izquierda en** a si existe el límite:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

El valor de dicho límite se llama la **derivada por la izquierda de** f **en** a.
Análogamente se dice que f **es derivable por la derecha en** a, si existe el límite:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

El valor de dicho límite se llama la **derivada por la derecha de** f **en** a.

Teniendo en cuenta la relación que hay entre el límite de una función en un punto y los límites laterales, es claro que:

i) Si $a = \max I$, entonces la derivabilidad de f en a es lo mismo que la derivabilidad por la izquierda de f en a.

ii) Si $a = \min I$, entonces la derivabilidad de f en a es lo mismo que la derivabilidad por la derecha de f en a.

iii) Si a no es un extremo de I, entonces equivalen las afirmaciones:

   a) f es derivable en a.

   b) Las derivadas por la izquierda y por la derecha de f en a existen y coinciden.

El siguiente resultado nos dice que la derivabilidad es una propiedad más fuerte que la continuidad.

Proposición. Toda función derivable en un punto es continua en dicho punto.
En efecto, si $f : I \to \mathbb{R}$ es derivable en a, de la igualdad:

$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad (x\in I,\ x\neq a)$$

se sigue que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, es decir, f es continua en a.

Reglas de derivación Sean $f\,g\colon I \to \mathbb{R}$ dos funciones. Se verifican las siguientes afirmaciones:

i) La función suma $f+g$ y la función producto fg son derivables en todo punto $a\in I$ en el que f y g sean derivables; en tal caso las derivadas respectivas vienen dadas por:
$$(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a); \quad (fg)'(a) = f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$$

ii) Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, la función cociente f/g es derivable en todo punto $a\in I$ en el que f y g sean derivables en cuyo caso se verifica que:
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

Corolario

Las funciones polinómicas son derivables en todo punto y las funciones racionales son derivables en todo punto de su conjunto natural de definición. Además la derivada de la función polinómica $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ en cada punto $x \in \mathbb{R}$ viene dada por:
$$f'(x) = a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}$$

Derivación de una función compuesta (regla de la cadena)

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon J \to \mathbb{R}$ con $f(I) \subseteq J$, y sea $h = g\circ f\colon I \to \mathbb{R}$ la función compuesta. Supongamos que f es derivable en $a\in I$ y que g es derivable en $f(a)$. Entonces h es derivable en a y $h'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

En particular, si g es derivable en J, la función compuesta $h = g\circ f$ es derivable en todo punto de I donde f sea derivable.

Demostración.

Pongamos $b = f(a)$. Tenemos que probar que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{h(x)-h(a)}{x-a} = g'(b)f'(a)$. Por hipótesis se cumple que :
$$\lim_{y\to b} \frac{g(y)-g(b)}{y-b} \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = g'(b)f'(a)$$

La idea de la demostración es hacer en esta igualdad la sustitución $y = f(x)$. Como no está garantizado por las hipótesis hechas que para $x \neq a$ se tenga $f(x) \neq b$, no está justificado hacer directamente la sustitución indicada (dividir por cero está prohibido). Podemos evitar esta dificultad como sigue. Definamos la función $\varphi\colon J \to \mathbb{R}$ por:

$$\varphi(y) = \frac{g(y) - g(b)}{y - b} \quad (y \neq b), \ \varphi(b) = g'(b)$$

Con ello la función φ es continua en b. Es inmediato ahora comprobar que para todo $x \in I$ con $x \neq a$ se verifica que:

$$\frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \varphi(f(x)) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad (1)$$

ahora, como f es continua en a (porque es derivable en a) y φ es continua en $b = f(a)$, se sigue que $\varphi \circ f$ es continua en a, por lo que:

$$\lim_{x \to a} \varphi(f(x)) = \varphi(f(a)) = \varphi(b) = g'(b).$$

La igualdad (1) nos dice ahora que:

$$\lim_{x \to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = g'(b) f'(a)$$

como queríamos probar.

Derivabilidad de las funciones exponencial y logaritmo

La función exponencial $x \mapsto \exp(x) = e^x \ (x \in \mathbb{R})$ y la función logaritmo natural $x \mapsto \log x \ (x \in \mathbb{R}^+)$ son derivables en todo punto de sus respectivos intervalos de definición, siendo:

$$(\exp)'(x) = \exp x \ \ (\forall x \in \mathbb{R}), \quad (\log)'(x) = \frac{1}{x} \ \ (\forall x \in \mathbb{R}^+)$$

Deducimos en particular que:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\log x}{x - 1} = 1; \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x)}{x} = 1; \quad \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

Deducimos también un importante resultado que permite resolver en muchos casos las indeterminaciones “1^∞” y “$0\,\infty$”.

Criterio de equivalencia logarítmica

Sea $a \in I$, f y g funciones definidas en $I \setminus \{a\}$. Supongamos que $f(x) > 0$ para $x \in I \setminus \{a\}$, y que $\lim_{x \to a} f(x) = 1$. Entonces se tiene que:

i) $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^L$ si, y sólo si, $\lim\limits_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = L$.

ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = +\infty$ si, y sólo si, $\lim\limits_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = +\infty$.

iii) $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 0$ si, y sólo si, $\lim\limits_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = -\infty$.

Demostración.

Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$\varphi(x) = \frac{\log x}{x-1},\ (x \neq 1),\ \varphi(1) = 1.$$

Nótese que φ es una función continua. Pongamos:

$$f(x)^{g(x)} = \exp\big(g(x)\log(f(x))\big) = \exp\big(g(x)(f(x)-1)\varphi(f(x))\big)$$

Puesto que $\lim\limits_{x\to a}\varphi(f(x)) = 1$ se sigue que:

$$\lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1)\varphi(f(x)) = L \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$$

si, y sólo si

$$\lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1)) = L \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$$

lo que prueba las afirmaciones hechas.

Proposición

Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ y $g(x) > 0$ para todo $x \in I$. Se verifica entonces que:

i) f es derivable en a si, y sólo si, la función $h(x) = \exp(f(x))$ es derivable en a en cuyo caso $h'(a) = f'(a)\exp(f(a))$.

ii) g es derivable en a si, y sólo si, la función $\varphi(x) = \log(g(x))$ es derivable en a en cuyo caso $\varphi'(a) = \dfrac{g'(a)}{g(a)}$.

iii) Si f y g son derivables en a la función $\psi(x) = [g(x)]^{f(x)}$ también es derivable en a y

$$\psi'(a) = \psi(a)\left(\log(g(a))f'(a) + f(a)\frac{g'(a)}{g(a)}\right).$$

Derivabilidad de las funciones trigonométricas

Las funciones seno y coseno son derivables en todo punto verificándose que:

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos x \quad \cos'(x) = -\operatorname{sen} x.$$

En particular, se verifica que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0.$$

Las derivadas de las demás funciones trigonométricas se deducen con facilidad a partir de las derivadas del seno y del coseno.

Derivabilidad de las funciones hiperbólicas

Las derivadas de las funciones hiperbólicas y de sus inversas se deducen con facilidad de las derivadas del logaritmo y de la exponencial. Se comprueba sin dificultad que:

$$\operatorname{senh}'(x)=\cosh x,\ \ \cosh'(x)=\operatorname{senh} x,\ \ \operatorname{argsenh}'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\operatorname{argcosh}'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ \ \operatorname{argsech}'(x)=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}},\ \ \operatorname{argcosech}'(x)=\frac{-1}{x\sqrt{x^2+1}}$$

Teoremas de Rolle y del valor medio

Los resultados más útiles del cálculo diferencial se refieren a funciones derivables en todos los puntos de un intervalo. El teorema del valor medio es frecuentemente atribuido a Joseph Louis Lagrange; no obstante, fue publicado por vez primera en 1806 por el físico André Marie Ampére que justificaba el resultado usando ideas de Lagrange y suponiendo que la función derivada era continua lo cual, como se verá enseguida, es innecesario. Quince años más tarde Augustin Louis Cauchy volvió a probar el teorema con las mismas hipótesis. El teorema del valor medio es uno de los resultados más útiles del Cálculo. Su utilidad se debe principalmente a que dicho teorema permite acotar el incremento de una función cuando se conoce una cota de su derivada.

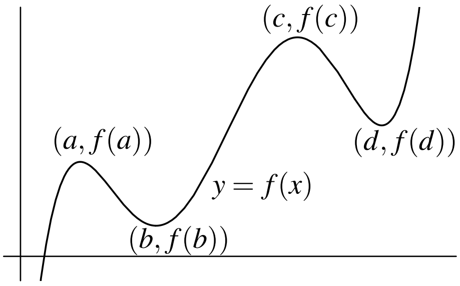
Michel Rolle (1652-1719) fue miembro de la Académie des Sciences y en 1691 estudiando un método para resolver ecuaciones estableció sin demostrar el teorema que ahora lleva su nombre que, como veremos, es esencialmente equivalente al teorema del valor medio.

La función derivada

Dada una función $f: I\to\mathbb{R}$ derivable en todo punto de I, la **función derivada** de f es la función $f': I\to\mathbb{R}$ que a cada punto $x\in I$ hace corresponder la derivada de f en dicho punto.

Extremos relativos

Dada una función cualquiera $f : I \to \mathbb{R}$, se dice que f tiene en un punto $a \in I$ un *máximo relativo* (resp. *mínimo relativo*) si hay algún número $r > 0$ tal que $]a-r, a+r[\subseteq I$ y $\forall x \in]a-r, a+r[$ se verifica que $f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $f(x) \geqslant f(a)$). La expresión *extremo relativo* se utiliza para referirse indistintamente a un máximo o a un mínimo relativo.



La función f tiene máximos relativos en los puntos a y c y mínimos relativos en los puntos b y d. Nótese que $f(d) > f(a)$, es decir, el valor de una función en un mínimo relativo puede ser mayor que el valor en un máximo relativo.

El siguiente resultado nos dice que en los extremos relativos de una función derivable la tangente es horizontal.

Condición necesaria de extremo relativo

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ y supongamos que f tiene un extremo relativo en a y que f es derivable en a. Entonces se verifica que $f'(a) = 0$.

Demostración

Supongamos que a es un máximo relativo de f. Entonces hay un número $r > 0$ tal que $]a-r, a+r[\subseteq I$ y $\forall x \in]a-r, a+r[$ se verifica que $f(x) \leqslant f(a)$. Puesto que f es derivable en a y el punto a no es un extremo del intervalo I, se verifica que:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Puesto que para $a-r<x<a$ es $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$, se sigue que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$.

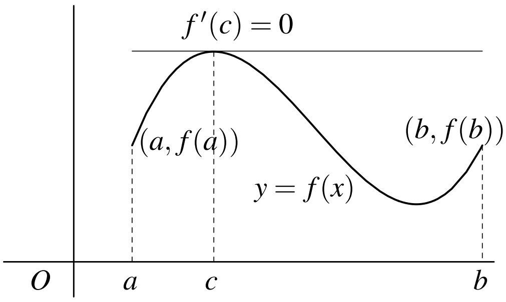
Puesto que para $a<x<a+r$ es $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$, se sigue que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$. Por tanto $f'(a) = 0$.

Es importante observar que esta condición necesaria no es suficiente. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ no tiene ningún extremo relativo en $\mathbb{R}$ pero $f'(0) = 0$.

Teorema de Rolle

Sea $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ verificando que $f(a) = f(b)$. Entonces existe algún punto $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Demostración

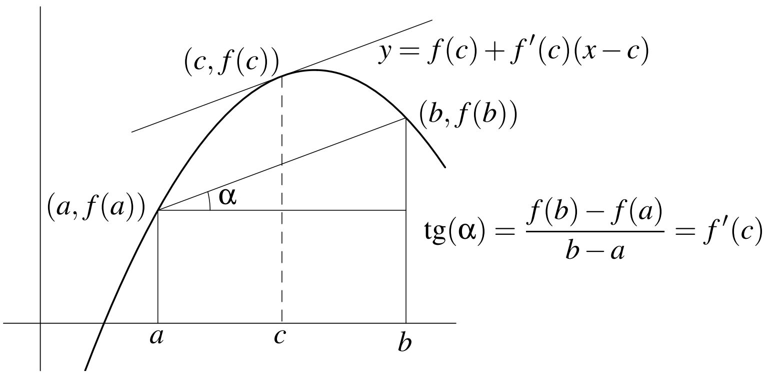


La continuidad de f en $[a,b]$ garantiza que f alcanza en un punto $u \in [a,b]$ un mínimo absoluto y en un punto $v \in [a,b]$ un máximo absoluto. Si $\{u,v\} = \{a,b\}$, entonces será $f(u) = f(v)$ y, por tanto f es constante en $[a,b]$ y, en consecuencia, su derivada es nula. Si $\{u,v\} \neq \{a,b\}$, entonces alguno de los puntos u, v está en $]a,b[$ y es un extremo relativo de f por lo que, en virtud de la proposición anterior, concluimos que la derivada de f se anula en algún punto de $]a,b[$.

Teorema del valor medio

Sea $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$. Entonces existe algún punto $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Demostración



Definamos una función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = \lambda f(x) + \mu x$ donde λ, μ son números que elegiremos por la condición de que $g(a) = g(b)$, es decir $\lambda(f(a) - f(b)) = \mu(b - a)$.

Para ello basta tomar $\lambda = b - a$ y $\mu = f(a) - f(b)$. Podemos aplicar ahora el teorema de Rolle a la función $g(x) = (b-a)f(x) + (f(a) - f(b))x$, para deducir que hay un punto $c \in]a,b[$ tal que $g'(c) = (b-a)f'(c) + (f(a) - f(b)) = 0$, lo que concluye la demostración.

Consecuencias del teorema del valor medio

Proposición

Sea f una función derivable en un intervalo I, y supongamos que existe $M \geqslant 0$ tal que $|f'(x)| \leqslant M$ para todo $x \in I$. Entonces se verifica que $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|$ para todos $x,y \in I$. En particular, si $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$ entonces f es constante en I.

Proposición

Sea I un intervalo, $a \in I$ y f una función continua en I y derivable en $I \setminus \{a\}$. Si la función derivada f' tiene límite por la derecha (resp. por la izquierda) en a entonces f es derivable por la derecha (resp. por la izquierda) en a con derivada por la derecha (resp. por la izquierda) en a igual al valor de dicho límite. En particular, si existe $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = L$ entonces f es derivable en a y $f'(a) = L$.

Demostración

Supongamos que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f'(x) = L$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $]a-\delta, a] \subset I$ y para $a - \delta < x < a$ se verifica que $|f'(x) - L| < \varepsilon$. Dado $x \in]a-\delta, a]$ podemos aplicar el teorema del valor medio a la función f en el intervalo $[x,a]$ y deducimos que hay algún punto $c \in]x,a[\subset]a-\delta, a[$ tal que $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c)$ y por tanto:

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - L \right| = |f'(c) - L| < \varepsilon$$

lo que prueba que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$, es decir, f es derivable por a izquierda en a y la derivada por la izquierda de f en a es igual a L.

El resto de las afirmaciones del enunciado se deducen fácilmente de lo anterior.

Corolario

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en el intervalo I. Entonces la función derivada $f' : I \to \mathbb{R}$ no tiene discontinuidades evitables ni discontinuidades de salto.

Derivabilidad y monotonía

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en el intervalo I. Se verifica entonces que f es creciente (resp. decreciente) en I si, y sólo si, $f'(x) \geqslant 0$ (resp. $f'(x) \leqslant 0$) para todo $x \in I$.

Demostración

Supongamos que $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in I$. Dados dos puntos $u, v \in I$ con $u < v$, podemos aplicar el teorema del valor medio a f en el intervalo $[u, v]$ para deducir que existe $c \in]u, v[$ tal que $f(v) - f(u) = f'(c)(v - u) \geqslant 0$, por lo que $f(u) \leqslant f(v)$, es decir f es creciente. Recíprocamente, si f es creciente en I entonces para todos $a, x \in I$, con $x \neq a$, se tiene que $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$, lo que implica que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \geqslant 0.$$

Proposición

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en el intervalo I con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Se verifica entonces que:

- O bien f es estrictamente creciente y $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$
- O bien f es estrictamente decreciente y $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$.

Demostración

Dados dos puntos $u, v \in I$ con $u \neq v$, podemos razonar como antes para obtener que existe $c \in]u, v[$ tal que $f(v) - f(u) = f'(c)(v - u) \neq 0$. Hemos probado así que f es inyectiva en el intervalo I. Como, además f es continua en I (por ser derivable), podemos usar un resultado del capítulo anterior para deducir que f es estrictamente monótona en I. Es suficiente tener en cuenta ahora el resultado inmediatamente anterior para concluir la demostración.

Es importante advertir que el resultado anterior nos dice que si una función f es derivable en un intervalo y la derivada f' toma valores positivos y negativos, entonces f' se anula en algún punto. Este resultado recuerda mucho al teorema de los ceros de Bolzano para funciones continuas en un intervalo, con una notable diferencia: aquí no exigimos que la función derivada f' sea continua. De hecho, se verifica el siguiente resultado.

Propiedad del valor intermedio para derivadas

Sea φ una función definida en un intervalo I que es la derivada de alguna función en dicho intervalo. Entonces se verifica que la imagen por φ de I, $\varphi(I)$, es un intervalo.

Demostración

Por hipótesis hay una función derivable $f : I \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = f'(x)$ para todo $x \in I$. Sean $u = \varphi(a)$, $v = \varphi(b)$ dos valores que toma la función φ, y supongamos $u < v$. Dado $\lambda \in]u, v[$, definimos la función $g(x) = f(x) - \lambda x$. Tenemos entonces $g'(a) = \varphi(a) - \lambda = u - \lambda < 0$ y $g'(b) = \varphi(b) - \lambda = v - \lambda > 0$. Por tanto la derivada de g toma valores positivos y negativos en el intervalo I y, por tanto, tiene que anularse, es decir, existe algún punto $c \in I$ tal que $g'(c) = \varphi(c) - \lambda = 0$, esto es, $\varphi(c) = \lambda$. Hemos probado así que si φ toma dos valores también toma todos los comprendidos entre ellos dos; es decir que $\varphi(I)$ es un intervalo.

Derivación de la función inversa

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en el intervalo I con derivada $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Entonces f es una biyección de I sobre el intervalo $J = f(I)$, y la función inversa $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ es derivable en J siendo

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad (y \in J).$$

Demostración

Las hipótesis hechas implican que f es estrictamente monótona y continua; por tanto es una biyección de I sobre $J = f(I)$, y la función inversa $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ es continua en J. Sea $b = f(a) \in J$. Puesto que

$$\lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

la función $h : I \to \mathbb{R}$ dada por:

$$h(x) = \frac{x - a}{f(x) - f(a)} \text{ para } (x \neq a), \quad h(a) = \frac{1}{f'(a)}$$

es continua en I. Como f^{-1} es continua en J, deducimos que $h \circ f^{-1}$ es continua en J, por lo que, en particular, $\lim_{y \to b} h(f^{-1}(y)) = h(f^{-1}(b)) = h(a)$, pero, para todo $y \in J$, con $y \neq b$ es $h(f^{-1}(y)) = \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}$, concluimos así que:

$$\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Derivabilidad de las funciones trigonométricas inversas

Se comprueba sin dificultad que:

$$\operatorname{arc\,tg}'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \operatorname{arc\,sen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x \in]-1,1[)$$

Teorema del valor medio generalizado

Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en $]a,b[$. Entonces existe algún punto $c \in]a,b[$ tal que $(f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c)$.

Demostración

Definimos una función $h(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$ donde λ, μ son números que se eligen de forma que $g(a) = g(b)$, esto es, $\lambda(f(a)-f(b)) = \mu(g(b)-g(a))$. Basta para ello tomar $\lambda = g(b)-g(a), \mu = f(a)-f(b)$. El teorema del Rolle, aplicado a la función $h(x) = (g(b)-g(a))f(x)-(f(b)-f(a))g(x)$, nos dice que hay un punto $c \in]a,b[$ tal que $h'(c) = 0$, lo que concluye la demostración.

Reglas de L'Hôpital

Guillaume François Antoine de L'Hôpital, Marqués de Saint Mesme (1661-1704) publicó (anónimamente) en 1696 el primer libro de texto sobre cálculo diferencial el cual tuvo gran éxito e influencia durante el siglo XVIII. En él aparecen los resultados que hoy llevan su nombre los cuales permiten resolver en muchos casos indeterminaciones de la forma $0/0$ o ∞/∞ que se presentan frecuentemente al estudiar el límite de un cociente de dos funciones. Si bien L'Hôpital era un escritor excepcionalmente claro y eficaz, las llamadas "reglas de L'Hôpital" no fueron establecidas por él sino por su maestro Jean Bernouilli (1667-1748) que no las publicó. Las distintas formas de las reglas de L'Hôpital pueden resumirse en el siguiente enunciado.

Teorema

Sea $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, f y g funciones derivables en $]a,b[$ con $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in]a,b[$. Sea $\alpha \in \{a,b\}$ y supongamos que se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$.

b) $\lim\limits_{x\to\alpha} |g(x)| = +\infty$.

y además $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Entonces se verifica que $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Demostración

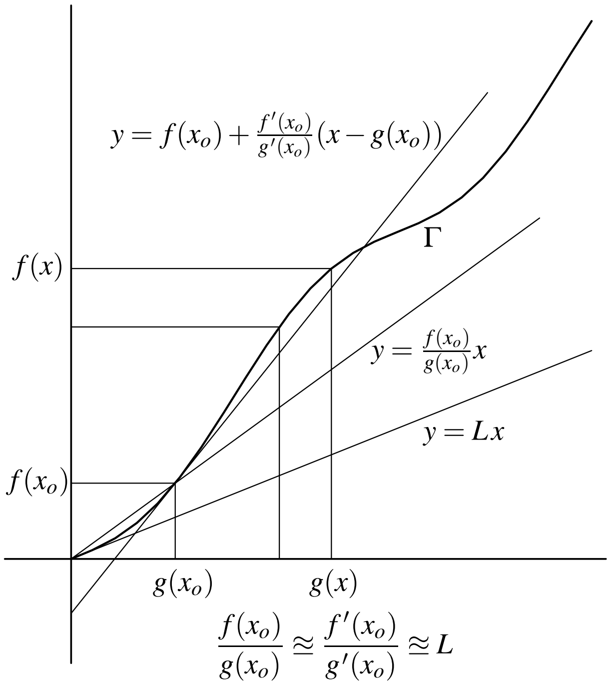
Antes de dar una demostración al uso vamos a explicar por qué la hipótesis de que el cociente de las derivadas tiene límite implica que también lo tiene el cociente de las funciones. Para fijar ideas, consideremos el caso en que $\alpha = a$ es un número real y $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$. Definamos $f(a) = g(a) = 0$. Nótese que aunque el punto $(g(x), f(x))$ recorre una trayectoria en en plano que termina en $(0,0)$ cuando $x = a$, el límite $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x)$ no tiene por qué existir. Ello se debe a que la proximidad a $(0,0)$ del punto $(g(x), f(x))$ no nos proporciona ninguna información sobre el valor del cociente $f(x)/g(x)$. Baste considerar que en un círculo centrado en $(0,0)$ de radio ε, hay puntos (u,v) para los que el cociente u/v puede tomar cualquier valor. Geométricamente, podemos interpretar $f(x)/g(x)$ como la pendiente de la recta que une $(0,0)$ con el punto $(g(x), f(x))$. Si imaginamos la trayectoria que recorre el punto $(g(x), f(x))$ como una curva, Γ, en el plano que termina en $(0,0)$, parece evidente que, cuando dicho punto está muy próximo a $(0,0)$, el número $f(x)/g(x)$ está muy próximo a la pendiente de la tangente a Γ en $(g(x), f(x))$. Nótese que como f y g no se suponen derivables en $x = a$, no está garantizado que $\Gamma = \{(g(x), f(x)) : x \in I\}$ tenga tangente en el origen, es decir, para $x = a$. Podemos, sin embargo, calcular la pendiente de la tangente a Γ en puntos distintos del origen. Para ello observemos que las hipótesis hechas implican que g es inyectiva, por lo que, llamando $J = g(I)$, es claro que $\Gamma = \{(t, f(g^{-1}(t))), t \in J\}$; es decir, Γ es la gráfica de la función $h\colon J \to \mathbb{R}$ dada por $h(t) = f(g^{-1}(t))$. Las hipótesis hechas garantizan que h es derivable en J y su derivada, es decir, la pendiente de la tangente a Γ en el punto $(t, f(g^{-1}(t)))$, viene dada por:

$$h'(t) = \frac{f'(g^{-1}(t))}{g'(g^{-1}(t))}.$$

Para obtener la pendiente de la tangente a Γ en el punto $(g(x), f(x))$ basta sustituir t por $g(x)$ en la igualdad anterior, es decir, dicha pendiente viene dada por:

$$h'(g(x)) = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

El dibujo siguiente puede ser de ayuda:



A la vista de lo anterior, se comprende ahora que si exigimos que $f'(x)/g'(x)$ tenga límite L en el punto a, estamos obligando a que el cociente $f(x)/g(x)$ también tenga límite igual a L en a. En el dibujo se ha supuesto que L es un número real, pero está claro que puede suponerse también $L = +\infty$ o $L = -\infty$, lo que corresponde a los casos en que Γ tiene tangente vertical en el origen.

Daremos ahora una demostración formal del teorema en dos casos particulares.

Caso1 (Primera regla de L'Hôpital). Supongamos que $\alpha = a$ y L son números reales y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Definamos $f(a) = g(a) = 0$. Dado $x \in I$, $x \neq a$, aplicamos el teorema del valor medio generalizado a las funciones f y g en el intervalo $[a, x]$ para obtener $c_x \in]a, x[$ tal que $(f(x) - f(a))g'(c_x) = (g(x) - g(a))f'(c_x)$, es decir, $f(x)g'(c_x) = g(x)f'(c_x)$. Las hipótesis hechas implican que g es estrictamente monótona en I y, como $g(a) = 0$, deducimos que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Obtenemos así que:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \qquad (1)$$

Por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $a < t < a + \delta$ es $\left|\frac{f'(t)}{g'(t)} - L\right| < \varepsilon$. Deducimos de la igualdad (1) que si $a < x < a+\delta$ se tiene que:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \varepsilon.$$

Hemos probado así que $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = L$. Los casos en que $L = +\infty$, $L = -\infty$ se tratan de la misma forma.

Caso 2 (Segunda Regla de L'Hôpital). Supongamos que $\alpha = a$ y L son números reales y $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$. Esta última condición implica que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ suficientemente próximo al punto a, y por el carácter local del límite no es restrictivo suponer que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Nótese también que las hipótesis hechas implican que g es inyectiva en I. La hipótesis $\lim\limits_{x\to a} f'(x)/g'(x) = L$, nos dice que dado $\varepsilon > 0$, hay un número (fijo en lo que sigue) $c \in I$, tal que para $a < t \leqslant c$ se verifica que:

$$\left|\frac{f'(t)}{g'(t)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (1)$$

Como $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$, hay un número $\delta > 0$ tal que $a+\delta \leqslant c$ y para $a < x < a+\delta$ se verifica que:

$$\frac{|g(c)|}{|g(x)|} < 1, \qquad \frac{|f(c) - Lg(c)|}{|g(x)|} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

Dado $a < x < a+\delta$ aplicamos el teorema del valor medio generalizado para obtener un punto $c_x \in]x, c[$ tal que $\dfrac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$. Teniendo en cuenta la identidad:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} - L &= \left(\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} - L\right)\left(1 - \frac{g(c)}{g(x)}\right) + \frac{f(c)-Lg(c)}{g(x)} \\
&= \left(\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - L\right)\left(1 - \frac{g(c)}{g(x)}\right) + \frac{f(c)-Lg(c)}{g(x)}
\end{aligned}$$

deducimos, en virtud de (1) y (2), que para todo $x \in]a, a+\delta[$ se verifica que:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}2 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Hemos probado así que $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = L$. Los casos en que $L = +\infty$, $L = -\infty$ se tratan de la misma forma.

Los demás casos tienen un tratamiento similar y también pueden reducirse a los ya estudiados sin más que invertir la variable.

Nótese que, tal y como las hemos enunciado, las reglas de L'Hôpital permiten calcular límites por la derecha y por la izquierda en un punto y, por tanto, podemos usarlas para calcular el límite en un punto de un intervalo que no sea extremo del mismo.

Derivadas sucesivas. Polinomios de Taylor

Sea f una función derivable en un intervalo I. Si la función derivada f' también es derivable en I decimos que f es *dos veces derivable* en I y la función $f'' := (f')'$ se llama *derivada segunda* de f en I. En general, si $n \in \mathbb{N}$, decimos que f es $n+1$ *veces derivable* en I si f es n veces derivable en I y la función derivada de orden n de f en I que representaremos por $f^{(n)}$, es derivable en I; en cuyo caso la función $f^{(n+1)} := (f^{(n)})'$ se llama *derivada de orden* $n+1$ de f en I. Si n es un número natural, $n \geqslant 2$, decimos que f es n *veces derivable en un punto* $a \in I$, si f es $n-1$ veces derivable en I y la función $f^{(n-1)}$ es derivable en a. Se dice que f es una función de clase C^n en I si f es n veces derivable I y la función $f^{(n)}$ es continua en I. Se dice que f es una función de clase C^∞ en I si f tiene derivadas de todos órdenes en I. Por convenio se define $f^{(0)} = f$.

Observemos que una función f derivable en un punto a puede ser aproximada localmente por una función polinómica $P(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ de grado $\leqslant 1$, de forma que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{x-a} = 0$$

Es natural preguntarse si, en el caso de que f sea derivable n veces en a, existirá una función polinómica P de grado $\leqslant n$, de forma que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Nótese que, en el caso $n=1$, el polinomio $P(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ es el único polinomio de grado $\leqslant 1$ que cumple que $P(a) = f(a)$ y $P'(a) = f'(a)$. En el caso general, parece razonable hallar un polinomio P de grado $\leqslant n$ cuyo valor y el valor de sus derivadas, hasta la del orden n, en el punto a coincida con el valor de f y de las respectivas derivadas de f en a. Pongamos para ello $Q(x) = P(x+a)$ y notemos que Q es un polinomio de grado $\leqslant n$ y $Q^{(k)}(x) = P^{(k)}(x+a)$ para $k = 0, 1, \ldots, n$. Sea $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Calcularemos los coeficientes de Q por la condición de que $Q^{(k)}(0) = f^{(k)}(a)$. Con ello se obtiene fácilmente que $a_k = f^{(k)}(a)/k!$. Resulta así que el polinomio P dado por:

$$P(x) = Q(x-a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

verifica que $P^{(k)}(a) = Q^{(k)}(0) = f^{(k)}(a)$ para $k = 0, 1, \ldots, n$ y es el único polinomio de grado $\leqslant n$ que cumple dichas condiciones.

Definición

Sea f una función n veces derivable en un punto a. La función polinómica $T_n(f,a)$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por $T_n(f,a)(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ se llama el **polinomio de Taylor de orden n de f en a.**

Teorema de Taylor-Young

Sea f una función n veces derivable en un punto a, y sea $T_n(f,a)$ el polinomio de Taylor de orden n de f en a. Entonces se verifica que:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n(f,a)(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Demostración

Haremos la demostración por inducción. Para $n = 1$ la afirmación del enunciado es cierta sin más que recordar la definición de derivada de una función en un punto. Supongamos que la afirmación del enunciado es cierta para toda función n veces derivable en a. Sea f una función $n+1$ veces derivable en a. Entonces la función $g = f'$ es n veces derivable en a y por tanto:

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x) - T_n(g,a)(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Se comprueba fácilmente que $T'_{n+1}(f,a)(x) = T_n(g,a)(x)$, con lo cual resulta que $g(x) - T_n(g,a)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\big(f(x) - T_{n+1}(f,a)(x)\big)$. Por el teorema de L'Hôpital obtenemos que:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_{n+1}(f,a)(x)}{(x-a)^{n+1}} = \lim_{x\to a} \frac{g(x) - T_n(g,a)(x)}{(n+1)(x-a)^n} = 0.$$

Lo que concluye la demostración.

El siguiente resultado, consecuencia directa del que acabamos de probar, es muy útil para calcular límites.

Corolario

Sea f una función definida en un intervalo I que es $n+1$ veces derivable en un punto $a \in I$, y sea $T_n(f,a)$ el polinomio de Taylor de orden n de f en a. Entonces se verifica que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n(f,a)(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a).$$

El siguiente resultado es de gran utilidad para el estudio de los extremos relativos de una función.

Condiciones suficientes de extremo relativo

Sean I un intervalo, a un punto de I que no es extremo de I y $f : I \to \mathbb{R}$ una función $n \geqslant 2$ veces derivable en a. Supongamos que $f^{(k)}(a) = 0$ para $k = 1, 2, \ldots, n-1$, y $f^{(n)}(a) \neq 0$. Entonces:

i) Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, f tiene un mínimo relativo en a.

ii) Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$, f tiene un máximo relativo en a.

iii) Si n es impar entonces f no tiene extremo relativo en a.

Demostración

Basta observar que, en virtud de las hipótesis hechas, se verifica que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \neq 0$$

En virtud del teorema de conservación local del signo, existe un número $r > 0$ tal que $]a-r, a+r[\subset I$ y para $x \in]a-r, a+r[$, $x \neq a$ se verifica que:

$$\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} f^{(n)}(a) > 0.$$

Si n es par será $(x-a)^n > 0$, por lo que si $f^{(n)}(a) > 0$ tiene que ser $f(x) - f(a) > 0$ para todo $x \in]a-r, a+r[\setminus \{a\}$, es decir, f tiene un mínimo relativo (estricto) en el punto a; si por el contrario es $f^{(n)}(a) < 0$ entonces tiene que $f(x) - f(a) < 0$ para todo $x \in]a-r, a+r[\setminus \{a\}$, es decir, f tiene un máximo relativo (estricto) en el punto a. En el caso en que n sea impar se tiene que $(x-a)^n < 0$ para $a-r < x < a$ y $(x-a)^n > 0$ para $a < x < a+r$, deducimos que para $a-r < x < a$, $f(x) - f(a)$ tiene signo opuesto al que tiene para $a < x < a+r$. En consecuencia f no tiene un extremo relativo en a.

El siguiente resultado es importante porque permite acotar el error que se comete al aproximar $f(x)$ por $T_n(f,a)(x)$.

Teorema de Taylor

Sea f una función $n+1$ veces derivable en un intervalo I. Dados dos puntos cualesquiera x,a en I con $x \neq a$, se verifica que existe algún punto c en el intervalo abierto de extremos a y x tal que:

$$f(x) - T_n(f,a)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Demostración

En lo que sigue el punto x y el punto a *están fijos*. Definamos la función $g: I \to \mathbb{R}$ dada para todo $t \in I$ por:

$$g(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

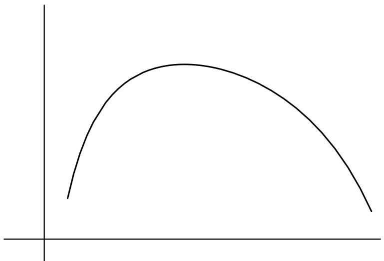
Se comprueba fácilmente que $g'(t) = -\dfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$. Aplicamos ahora el teorema del valor medio generalizado a las funciones g y $h(t) = (x-t)^{n+1}$ en el intervalo de extremos x y a para obtener que hay un punto c comprendido entre x y a tal que $(h(x) - h(a))g'(c) =$ $= (g(x) - g(a))h'(c)$. Como $g(x) = h(x) = 0$, obtenemos que:

$$(x-a)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n = g(a)(n+1)(x-c)^n.$$

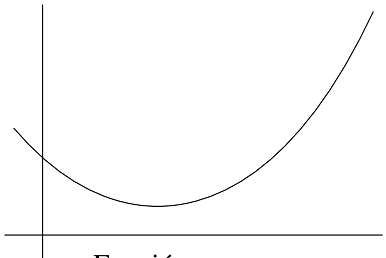
Simplificando, y teniendo en cuenta que $g(a) = f(x) - T_n(f,a)(x)$, se obtiene la igualdad del enunciado.

Funciones convexas y funciones cóncavas

Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función derivable en el intervalo I. Se dice que f es una función convexa en I si la gráfica de f queda siempre por encima de la recta tangente en cualquier punto, es decir, si para todo par de puntos $x,a \in I$ se verifica que $f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x-a)$. Se dice que f es cóncava si $-f$ es convexa.



Función cóncava



Función convexa

La función exponencial natural es una función convexa y el logaritmo natural es cóncava.
El siguiente resultado es una sencilla aplicación del teorema del valor medio.

Proposición

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en el intervalo I. Se verifica entonces que f es convexa si, y sólo si, $f''(x) \geqslant 0$ para todo $x \in I$.

Puntos de inflexión

Se dice que a es un punto de inflexión de una función f, si hay un número $r > 0$ tal que f es cóncava en el intervalo $]a-r, a[$ y f es convexa en el intervalo $]a, a+r[$ (o al revés). Es decir, los puntos en los que una función pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava se llaman puntos de inflexión.

El siguiente resultado se prueba fácilmente y queda como ejercicio.

Proposición

Si f tiene un punto de inflexión en a y es dos veces derivable en a, entonces $f''(a) = 0$.